第 12 講　高次方程式(2)

1 [1]　x が $0<x<1$ と $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$ を満たすとき，x^3 の値を求めよ．

[2]　$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^3-4x^2+8x+4 の値を求めよ．

【Point Pickup】

次数下げによる式の値の求め方

x が $g(x)=0$ を満たすとき，$f(x)$ の値を求める方法は主に次の①～④

① x の値を $f(x)$ に代入

② $g(x)$ を変形し，次数下げの式として利用

（例）　$x^2-2x-1=0 \Longleftrightarrow$

③ $f(x)\div g(x)$ を計算し，その「　　　　の値」を求める

④ $f(x)$ が分数式のとき，(分子)÷(分母) により分子の次数を下げる

（例）　$\dfrac{x+1}{x}=$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 3 次方程式　$x^3-ax^2+bx+a-6=0$　……①　について，次の問いに答えよ.

(1)　方程式①が $x=1$ を 2 重解にもつとき，定数 a，b の値，および残りの解を求めよ.

(2)　方程式①の実数解が $x=1$ のみで，他の 2 つの解が虚数解となるような a の値の範囲を求めよ.

［2］ 4 次方程式　$x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$　……①　について，次の問いに答えよ.

(1)　$t=x+\dfrac{2}{x}$ とおき，①を t の式で表せ.

(2)　方程式①を複素数の範囲で解け.

【Point Pickup】

[1]　組立除法による因数分解

3 次以上の高次方程式を解くとき，2 次方程式における「　　　　　」のようなシンプルな公式はない．よって，特殊な形を除き，解を見つけることが必要.

予想した解，または与えられた解をもとに，組立除法による因数分解を行うと効果的.

[2]　相反式

降べきの順に整理したとき，左右から数えて等しい順番の項について，その係数が等しい式．特殊な形ゆえの解法が存在する.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α，β，γ とする．

(1)　$\alpha+\beta+\gamma=-a$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$，$\alpha\beta\gamma=-c$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\alpha+\beta+\gamma=1$，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3解を α，β，γ とすると

$\alpha+\beta+\gamma=$　　　　，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$　　　，$\alpha\beta\gamma=$

また，$\alpha+\beta+\gamma=l$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=m$，$\alpha\beta\gamma=n$ のとき

α，β，γ は3次方程式「　　　　　　　　　　　　　　　　」の3解

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　高次方程式(2)

［1］　iを虚数単位とする．$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}$ のとき，$3x^3+4x^2+3x-1$ の値は

［アイ］＋［ウ］$\sqrt{［エ］}\,i$ である．

［2］　4 次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$　……①　が $x=-2$ を 2 重解にもつとき，

$a=$［オ］，$b=$［カ］である．

［3］　3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-6=0$ の実数解を α，虚数解を β，γ とするとき，

$\alpha=$［キ］であり，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$［クケ］である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　高次方程式(2)

> 1 [1]　x が $0<x<1$ と $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$ を満たすとき，x^3 の値を求めよ．

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$　より　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3$　　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=5$　$x>0$ より　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

よって $x^2-\sqrt{5}\,x+1=0$　　$x=\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5-4}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\pm1}{2}$　　$0<x<1$ より　$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

また，$x^2=\sqrt{5}\,x-1$

したがって　$x^3=x^2\cdot x=(\sqrt{5}\,x-1)x=\sqrt{5}\,x^2-x=\sqrt{5}\,(\sqrt{5}\,x-1)-x=4x-\sqrt{5}$

$$=4\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\sqrt{5}=\boldsymbol{\sqrt{5}-2}$$

> 1 [2]　$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^3-4x^2+8x+4 の値を求めよ．

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき　$x-2=\sqrt{3}\,i$　　$(x-2)^2=(\sqrt{3}\,i)^2$

　$x^2-4x+4=-3$　　よって　$x^2-4x+7=0$

$x^3-4x^2+8x+4=(x^2-4x+7)x+x+4$

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき　$x^2-4x+7=0$ より

　$x^3-4x^2+8x+4=x+4=(2+\sqrt{3}\,i)+4=\boldsymbol{6+\sqrt{3}\,i}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　3次方程式　$x^3-ax^2+bx+a-6=0$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①が $x=1$ を2重解にもつとき，定数 a，b の値，および残りの解を求めよ．

(2)　方程式①の実数解が $x=1$ のみで，他の2つの解が虚数解となるような a の値の範囲を求めよ．

(1)　①を変形すると

$$(x-1)\{x^2+(1-a)x+1-a+b\}+b-5=0$$

この方程式が $x=1$ を解にもつので，$b-5=0$　よって　$b=5$

このとき　$(x-1)\{x^2+(1-a)x+6-a\}=0$

①が $x=1$ を2重解にもつので，$x^2+(1-a)x+6-a=0$　……②　が $x=1$ を解にもつ．

よって　$1+(1-a)\cdot 1+6-a=0$　　$a=4$

したがって　$\boldsymbol{a=4,\ b=5}$

このとき②は　$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$　$x=1,\ 2$　より，残りの解は　$\boldsymbol{x=2}$

(2)　①が $x=1$ を解にもつとき，(1)より　$b=5$

このとき，②が異なる2つの虚数解をもてばよい．

よって②の判別式を D とすると　$D=(a-1)^2+4(a-6)=a^2+2a-23$

$D<0$ より　$a^2+2a-23<0$　　よって　$\boldsymbol{-1-2\sqrt{6}<a<-1+2\sqrt{6}}$

2 [2]　4次方程式　$x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　$t=x+\dfrac{2}{x}$ とおき，①を t の式で表せ．

(2)　方程式①を複素数の範囲で解け．

(1)　$x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$ は $x=0$ を解にもたない．

よって両辺を x^2 で割って

$$x^2-4x+7-8\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0 \qquad \left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4-4\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0$$

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{2}{x}\right)+3=0$$

よって　$t=x+\dfrac{2}{x}$ とおくと　$\boldsymbol{t^2-4t+3=0}$

(2)　(1)より $t=1$，$t=3$

$t=1$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}=1$　　$x^2-x+2=0$　　よって　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$t=3$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}=3$　　$x^2-3x+2=0$　　よって　$x=1,\ 2$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって①の解は　$\boldsymbol{x=1,\ 2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}}$

<table><tr><td>

3　3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とする．

(1)　$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めよ．

</td></tr></table>

(1)　3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

係数を比較して　$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$　　よって示された．

(2)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$　より　$(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$

$\alpha+\beta+\gamma=1$ より　$1-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$　　よって　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$7-3\alpha\beta\gamma=1\cdot\{3-(-1)\}$　　よって　$\alpha\beta\gamma=1$

よって　$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=1$ より，α, β, γ は3次方程式

$t^3-t^2-t-1=0$ の3解

したがって　$\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1=0$　より　$\alpha^3=\alpha^2+\alpha+1$　つまり　$\alpha^4=\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

同様に　$\beta^4=\beta^3+\beta^2+\beta$, $\gamma^4=\gamma^3+\gamma^2+\gamma$

したがって　$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha+\beta+\gamma)$

$=7+3+1=\mathbf{11}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　高次方程式(2)

[1]　i を虚数単位とする．$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}$ のとき，$3x^3+4x^2+3x-1$ の値は

[アイ] ＋ [ウ] $\sqrt{[エ]}$ i である．

[2]　4次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$ ……① が $x=-2$ を2重解にもつとき，

$a=$ [オ]，$b=$ [カ] である．

[3]　3次方程式 $x^3-2x^2+3x-6=0$ の実数解を α，虚数解を β，γ とするとき，

$\alpha=$ [キ] であり，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$ [クケ] である．

解答例

[1]　$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{(1-\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i)}=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{3}$　より　$3x-1=\sqrt{2}\,i$

$(3x-1)^2=(\sqrt{2}\,i)^2$　　$9x^2-6x+1=-2$　よって　$3x^2-2x+1=0$

$3x^3+4x^2+3x-1=(3x^2-2x+1)(x+2)+6x-3$

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{3}$ のとき　$3x^3+4x^2+3x-1=6x-3=6\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{3}-3=\mathbf{-1+2\sqrt{2}}\,i$

[2]　$x^4+ax^3+14x^2+16x+b=(x+2)\{x^3+(a-2)x^2+(-2a+18)x+4a-20\}-8a+b+40$

方程式①が $x=-2$ を解にもつので，$-8a+b+40=0$ ……②

さらに①が $x=-2$ を2重解にもつので

$x^3+(a-2)x^2+(-2a+18)x+4a-20=0$ が $x=-2$ を解にもつ．

$x^3+(a-2)x^2+(-2a+18)x+4a-20=(x+2)\{x^2+(a-4)x-4a+26\}+12a-72$ より

$12a-72=0$　よって　$a=\mathbf{6}$　　このとき②より　$b=\mathbf{8}$

[3]　$x^3-2x^2+3x-6=0$ より　$(x-2)(x^2+3)=0$ ……①

よって実数解 α は　$\alpha=\mathbf{2}$

また，$x^3-2x^2+3x-6=0$ の3つの解が α，β，γ であることから，3次方程式の解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=2$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

よって　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2^2-2\cdot3=\mathbf{-2}$

(別解)　①より　実数解 α は $\alpha=2$，$x^2+3=0$ の解が β，γ

よって　$\alpha^2=4$，$\beta^2+3=0$，$\gamma^2+3=0$

したがって　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4-3-3=-2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。